Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
07.12.2019.

III разред

1. У понедељак је Зоран решио да од сутра почне да чита књигу. Првог дана прочитао је 32 странице, а сваког следећег дана по три странице више него претходног дана. Колико је укупно страница књиге прочитао након читања у суботу?

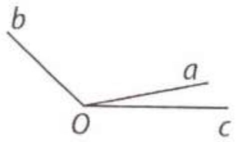
2. Дешифруј одузимање. Различитим словима одговарају различите цифре. Одреди бар једно решење.

$$\begin{array}{r} L\ A\ V \\ -\ Z\ E\ C \\ \hline M\ I\ Š \end{array}$$

3. Прецртај слику на папир који ћеш предати. Празна поља квадрата попуни различитим непарним бројевима од 3 до 19 (осим броја 11 који је већ уписан) тако да збирови у свим правцима буду једнаки, тј. да се добије магични квадрат.

	11	

4. Прецртај слику на папир који ћеш предати. Доцртај полуправу *Od* тако да угао *cOd* буде прав, а угао *bOd* оштар. Запиши све углове, па утврди колико међу њима има:
а) оштрих; б) правих; в) тупих углова.



5. Запиши све троцифрене природне бројеве којима је збир цифара 10, а највећа цифра им је за 6 већа од најмање.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

III РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Зоран је у уторак прочитао 32 странице [**3 поена**], у среду 35 страница [**3 поена**], у четвртак 38 страница [**3 поена**], у петак 41 страницу [**3 поена**], а у суботу 44 странице [**3 поена**]. Укупно је прочитао $32+35+38+41+44=190$ страница [**5 поена**].

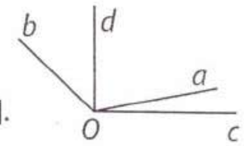
2. У датом одузимању имамо 9 различитих слова, па морамо користити 9 од 10 различитих цифара. Задатак има више решења, а нека решења су [**20 поена** за било које тачно одузимање]:

$$\begin{array}{r} 8\ 7\ 3 \\ -\ 6\ 5\ 4 \\ \hline 2\ 1\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ 9\ 0 \\ -\ 3\ 1\ 4 \\ \hline 5\ 7\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\ 8\ 6 \\ -\ 3\ 5\ 9 \\ \hline 1\ 2\ 7 \end{array}$$

3. (**МЛ 54/1**) Како је $3+5+7+9+13+15+17+19=88$, то збир наспрамних бројева треба да буде 22. Једно решење приказано је на слици [**20 поена** за било које тачно решење].

9	19	5
7	11	15
17	3	13

4. (**МЛ 52/2**) Углови су:
cOa, *aOd*, *dOb*, *cOd*, *cOb* и *aOb* [**5 поена**].
а) 3 [**5 поена**]; б) 1 [**5 поена**]; в) 2 [**5 поена**].



5. Постоје две могућности одабира цифара чији је збир 10, а разлика највеће и најмање цифре једнака шест: 6, 4, 0 [**5 поена**] или 7, 2, 1 [**5 поена**]. Од ових цифара могу се саставити 10 бројева: 640, 604, 460, 406, 721, 712, 271, 217, 172, 127 [по **1 поен** за сваки тачно записани број].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

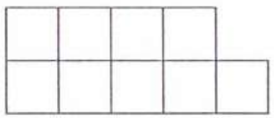
Општинско такмичење из математике ученика основних школа
07.12.2019.

IV разред

1. Колико
а) највише;
б) најмање
дана може да буде у 4 узастопна месеца?

2. Израчунај збир и разлику највећег и најмањег петоцифреног броја од којих сваки има збир цифара 24.

3. Од 9 квадрата састављена је фигура као на слици чији је обим 28 cm. Одреди збир обима свих квадрата који се могу уочити на слици.



4. Алма и Мира погађају број који је Рале замислио.
Алма: Замислио си број који је једнак производу бројева 750 и 31.
Мира: Замислио си број који је једнак производу бројева 640 и 36.
Ако је Алма погрешила за 250, за колико је погрешила Мира?

5. Одреди све природне бројеве који при дељењу са 7 дају количник једнак остатку.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. а) 123 [**10 поена**]. На пример, јул, август, септембар, октобар;
б) 120 [**10 поена**]. На пример, јануар, фебруар (када година није преступна), март, април.

2. (**МЛ 54/1**) Највећи тражени број је 99600 [**8 поена**], а најмањи 10599 [**8 поена**], па је 99600 + 10599 = 110199 [**2 поена**] и 99600 – 10599 = 89001 [**2 поена**].

3. Обим фигуре чини 14 страница малих квадрата од којих је фигура састављена, па је страница тих квадрата 2 cm. На слици се може уочити 9 малих квадрата од којих је састављена фигура и још 3 квадрата који су састављени од 4 мања квадрата и чија је страница 4 cm. Збир обима 9 малих квадрата је $9 \cdot 4 \cdot 2$ cm = 72 cm [**9 поена**], а збир обима 3 велика квадрата је $3 \cdot 4 \cdot 4$ cm = 48 cm [**9 поена**]. Тражени збир обима свих квадрата је 72 cm + 48 cm = 120 cm [**2 поена**].

4. Како је $750 \cdot 31 = 23\,250$ и како је Алма погрешила за 250, Рале је могао да замисли број 23 000 [**5 поена**] или 23 500 [**5 поена**].
Како је $640 \cdot 36 = 23\,040$, закључујемо да је Мира погрешила или за 40 [**5 поена**] или за 460 [**5 поена**].

5. (**МЛ 54/2**) Ако количник и остатак означимо са x, онда су тражени бројеви облика $7x + x = 8x$, $1 \leq x \leq 6$, па су то бројеви 8, 16, 24, 32, 40 и 48 [сваки тачно записани број **по 3 поена**. Ако је ученик записао све бројеве **20 поена**. Максималним бројем поена бодовати и ако ученик није констатовао да су тражени бројеви облика $8x$.]

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
07.12.2019.

V разред

1. У запису $AB + ABB + CBBC = BCDC$ замени свако слово цифром (иста слова истом цифром, а различита слова различитим цифрама) тако да сабирање буде тачно.

2. Спајањем два једнака квадра настала је коцка површине 384 cm^2. Израчунај површину тог квадра.

3. Дате су тачке A, B, C, D и E. Нека су тачке A, B и C колинеарне; A, D и E колинеарне и не постоје 4 тачке које су колинеарне. Колико:
   а) правих;
   б) троуглова
   одређује ових пет тачака?

4. Одреди елементе скупова A, B и C ако је:
   $$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad A \cap B = \{5, 6, 7\},$$
   $$A \setminus C = \{1, 2, 6, 7\}, \quad B \setminus (A \cup C) = \{8, 9\}, \quad B \cap C = \{3, 5\}.$$

5. Разлика два проста броја је једноцифрен број d ($d > 0$). Да ли број d може бити било који једноцифрени број?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

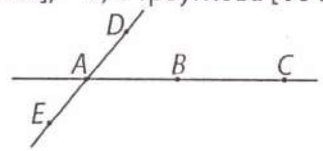
V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. **(МЛ 54/1)** A, B и C не могу бити 0 јер су бар у једном броју цифре највеће месне вредности. Збир цифара јединица је $B + B + C = 10 + C$, одакле је $B = 5$ [**5 поена**]. Дакле, $A5 + A55 + C55C = 5CDC$. На основу сабирања хиљада је $C = 4$ [**5 поена**], па је $A5 + A55 + 4554 = 54D4$. На основу сабирања десетица (и преноса 1 са месне вредности јединица), важи $D = A + 1$ [**5 поена**] и постоји пренос 1 на месну вредност стотина, а на основу сабирања стотина добијамо $A = 8$ и $D = 9$ [**5 поена**]. Дакле, $85 + 855 + 4554 = 5494$.

2. **(МЛ 53/5)** Нека је a ивица коцке. Из $6 \cdot a \cdot a = 384$, $a \cdot a = 64$, налазимо $a = 8$ cm [**5 поена**]. Површина квадра је
   $P = 2 \cdot 8\text{cm} \cdot 8\text{cm} + 2 \cdot 8\text{cm} \cdot 4\text{cm} + 2 \cdot 8\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 256\text{cm}^2$ [**15 поена**].

3. Један могући распоред тачака дат је на слици. У сваком распореду ове тачке одређују:
   а) 6 правих [**10 поена**]; б) 6 троуглова [**10 поена**].



4. Задатак има два решења:
   $A = \{1, 2, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{3, 4, 5\}$ [**10 поена**];
   $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{3, 4, 5\}$ [**10 поена**].

5. d може имати вредности 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9 јер је $1 = 3 - 2$, $2 = 5 - 3$, $3 = 5 - 2$, $4 = 11 - 7$, $5 = 7 - 2$, $6 = 11 - 5$, $8 = 11 - 3$ и $9 = 11 - 2$ [свака тачна вредност за d **по 2 поена**]. d не може имати вредност 7 јер је 7 непаран број и може се добити само као разлика непарног и парног броја. Једини паран прост број је 2 па би онда умањеник морао бити једнак 9, а 9 није прост број [**4 поена**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
07.12.2019.

VI разред

1. Основица AB једнакокраког троугла ABC је 10 cm, а угао на основици је 72°. Ако симетрала угла BAC сече крак BC у тачки D, израчунај дужину изломљене линије $BADC$.

2. За цео број кажемо да је *кул* ако је за један већи од броја дељивог са 3 (бројеви облика $3k+1$, $k \in Z$). Израчунај збир свих *кул* бројева између –300 и 300.

3. Све цифре петоцифреног броја $\overline{abcde}$ $(a \neq 0, e \neq 0)$ су међусобно различите. При томе збир цифара једнак је 10. Када се број сабере са бројем написаним истим цифрама, али у обрнутом поретку добија се број чије су све цифре једнаке. Одреди све такве петоцифрене бројеве.

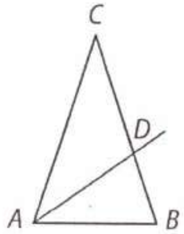
4. Микша је радио 6 тестова из математике од којих се сваки бодује целим бројем поена од 0 до 100. Он је на сваком од првих 5 тестова имао исти број поена, а на шестом је добио више поена него на претходном. Ако је у просеку на тих шест тестова остварио 72 поена, колико поена је Микша могао да освоји на последњем тесту?

5. У датом троуглу један унутрашњи угао једнак је неком спољашњем углу тог троугла. У истом троуглу један од преостала два спољашња угла је пет пута већи од неког од преостала два унутрашња угла. Израчунај све унутрашње и спољашње углове тог троугла.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.



1. Троугао BAD је једнакокрак са угловима од 72°, 72° и 36°, па је $AB = AD$ [**8 поена**]. Троугао ADC је једнакокрак са угловима од 36°, 36° и 108°, па је $DA = DC$ [**8 поена**]. Тражена дужина изломљене линије је $BA + AD + DC = 30$cm [**4 поена**].

2. Сви кул бројеви су облика $3k+1\,(k \in Z)$ и између –300 и 300 има их укупно 200 [**8 поена**]. Потребно је да израчунамо збир $-299 + (-296) + \ldots + 295 + 298$. Ако групишемо први и последњи сабирак, други и претпоследњи, ..., n-ти члан збира са леве стране са n-тим чланом са десне стране, добијамо 100 група сабирака и у свакој је збир –1 [**8 поена**]. Дакле, тражени збир је –100 [**4 поена**].

3. (**МЛ 52/3**) Цифре броја $\overline{abcde}$ су 0, 1, 2, 3, 4 [**5 поена**]. Бројеви $\overline{abcde}$ и $\overline{edcba}$ имају једнаке збирове цифара па њихов збир има збир цифара 20. По услову задатка, све цифре у збиру су једнаке, па је тај збир 44444 [**5 поена**]. Следи да је $c = 2$, а да цифре 0 и 4 не могу бити прва ни последња [**5 поена**]. Оваквих бројева има 4: 14203, 10243, 30241 и 34201 [**5 поена**].

4. (**МЛ 53/4**) Означимо са x број освојених поена на сваком од првих 5 тестова, а са y број поена на шестом тесту. Тада је $\frac{5x+y}{6}=72$ [**5 поена**] и $y > 72$ [**5 поена**]. Из $5x + y > 432$ налазимо да је $432 - y$ дељиво са 5 [**5 поена**], тако да постоји 5 могућности: $y \in \{77, 82, 87, 92, 97\}$ [**5 поена**].

5. Како је спољашњи угао једнак збиру друга два унутрашња, то спољашњи угао може бити једнак унутрашњем углу само код истог темена. Дакле, троугао је правоугли [**4 поена**]. Нека су унутрашњи углови α, β и γ, а одговарајући спољашњи α_1, β_1 и γ_1. Нека је $\gamma = \gamma_1 = 90°$. Могућности за остале углове су $\alpha_1 = 5\beta$, $\beta_1 = 5\alpha$, $\alpha_1 = 5\alpha$ и $\beta_1 = 5\beta$.
1) $\alpha_1 = 5\beta$. Из $\alpha_1 = \beta + \gamma$, добијамо $\beta = 22°\,30'$, $\alpha = 67°\,30'$, $\beta_1 = 157°\,30'$, $\alpha_1 = 112°\,30'$.
2) $\beta_1 = 5\alpha$. Аналогно претходном, добијемо исте величине углова.
3) $\alpha_1 = 5\alpha$. Из $\alpha + \alpha_1 = 180°$, добијамо $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\alpha_1 = 150°$, $\beta_1 = 120°$.
4) $\beta_1 = 5\beta$. Аналогно претходном, добијемо исте величине углова.
Дакле, унутрашњи углови тог троугла су: 22° 30′, 67° 30′ и 90° а спољашњи: 157° 30′, 112° 30′ и 90° [**8 поена**], или унутрашњи: 30°, 60° и 90° а спољашњи: 150°, 120° и 90° [**8 поена**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
07.12.2019.

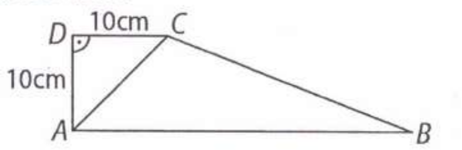
VII разред

1. Одреди два узастопна природна броја између којих се налази вредност израза
$$\sqrt{2019+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}.$$

2. Странице троугла ABC су $AB = 14$ cm, $BC = 15$ cm и $CA = 13$ cm.
а) Израчунај површину тог троугла.
б) Нека је S тачка странице AB која је на једнаким растојањима од страница AC и BC. Израчунај растојање тачке S од страница AC и BC.

3. Камени угаљ у јами садржи 2% воде, а после неколико дана изван јаме он садржи 6% воде. За колико тона се у том тренутку повећала маса угља, ако је из јаме извађено 1000 t угља?

4. На слици је приказан трапез $ABCD$. Ако је површина троугла ACD пет пута мања од површине троугла ABC, одреди обим и површину трапеза $ABCD$.



5. Одреди најмањи троцифрен природан број n за који је збир цифара његовог збира цифара једнак 9.

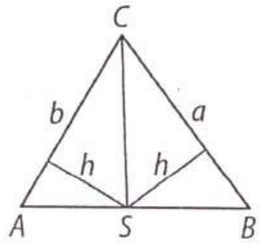
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

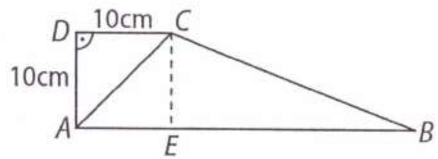
1. $\sqrt{2019+2+3+4}<\sqrt{2019+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}<\sqrt{2019+3+4+5}$.
$\sqrt{2028}<\sqrt{2019+\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{17}}<\sqrt{2031}$ [**10 поена**]. Како је $45=\sqrt{2025}<\sqrt{2028}$ и $46=\sqrt{2116}>\sqrt{2031}$ то је вредност израза између бројева 45 и 46 [**10 поена**].

2. а) Полуобим троугла ABC је 21cm, па се применом Херонове формуле може одредити његова површина. Површина троугла ABC је 84 cm^2 [**8 поена**].
б) Означимо са h растојање тачке S од странице AC и BC. Тада је $84=P_{ABC}=P_{ASC}+P_{BSC}=\frac{bh}{2}+\frac{ah}{2}=14h$, одакле је $h=6$ cm [**12 поена**].



3. Маса угља од 1000 t у јами, без воде, је 980 t [**3 поена**]. Како је ван јаме проценат воде 6%, то је маса угља ван јаме $1042\frac{26}{47}$ t [**15 поена**] Дакле, маса угља се повећа за $42\frac{26}{47}$ t [**2 поена**].

4. (**МЛ 54/1**) Троуглови ACD и ABC имају једнаке висине, па је $AB = 5CD = 50$cm [**5 поена**]. Сада је $BE = 40$ cm, где је E подножје нормале из тачке C на AB, и $CB=\sqrt{40^2+10^2}=10\sqrt{17}$ cm [**5 поена**]. Обим трапеза је $O=50+10+10+10\sqrt{17}=10\cdot(7+\sqrt{17})$ cm [**5 поена**], а површина $P=\frac{10\text{ cm}+50\text{ cm}}{2}\cdot 10\text{ cm}=300\text{ cm}^2$ [**5 поена**].



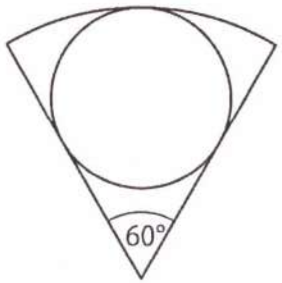
5. (**МЛ 53/5**) Најмањи троцифрени број дељив са 9 је број 108. Збир цифара његовог збира цифара је 9, па је $n = 108$ [**20 поена**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
07.12.2019.

VIII разред

1. Одреди све природне бројеве n за које важи
$$\frac{n(200-19n)}{(n-2)^2(n-4)^{2020}}>0.$$



2. Израчунај површину круга уписаног у кружни исечак површине $150\pi\ cm^2$ чији је централни угао 60° (види слику).

3. Реши једначину у скупу целих бројева
$$||2x-4|-6|+|7-|1-y||=0.$$

4. За које вредности реалног броја m једначина
$$\frac{3x+4m}{4}-\frac{3mx}{2}=m-\frac{x-1}{4}$$
има негативна решења?

5. Колики је најмањи могући збир четири унутрашња угла конвексног седмоугла чији сви углови имају целобројне мере (у степенима)?

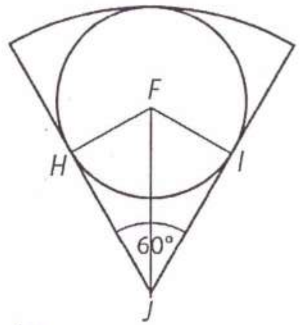
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Да би разломак био дефинисан мора бити $n \neq 2$ и $n \neq 4$ [**2 поена**]. Како је $n > 0$, $(n-2)^2 > 0$ и $(n-4)^{2020} > 0$, разломак је позитиван ако је $200 - 19n > 0$ [**2 поена**], одакле је $n \in \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ [свако решење по **2 поена**].

2. Површина кружног исечка је шестина површине круга из којег је тај исечак. Следи да је површина тог већег круга $900\pi\ cm^2$, односно да је полупречник исечка 30 cm [**5 поена**]. Нека је F центар круга, а H и I додирне тачке круга и полупречника којим је исечак ограничен, а J центар лука који ограничава кружни исечак. Како је троугао FIJ са угловима од 30°, 60° и 90°, то је $FJ = 2FI$. Одавде следи да је полупречник уписаног круга трећина полупречника исечка, односно 10 cm, па је површина уписаног круга $100\pi\ cm^2$ [**15 поена**].



3. Да би било $||2x-4|-6| + |7-|1-y|| = 0$ мора бити $||2x-4|-6| = 0$ и $|7-|1-y|| = 0$ [**4 поена**], одакле је $|2x-4| = 6$ и $|1-y| = 7$ [**4 поена**]. Из прве једначине је $2x - 4 = 6$ или $2x - 4 = -6$, одакле је $x = 5$ или $x = -1$ [свако решење по **3 поена**]. Из друге једначине је $1 - y = 7$ или $1 - y = -7$, одакле је $y = -6$ или $y = 8$ [свако решење по **3 поена**].

4. (**МЛ 54/1**) После сређивања добија се $x(4-6m) = 1$, одакле је (за $m \neq \frac{2}{3}$) решење $x=\frac{1}{2(2-3m)}$ [**8 поена**]. Да би било $\frac{1}{2(2-3m)}<0$ потребно је да важи $2 - 3m < 0$, тј. $m>\frac{2}{3}$ [**12 поена**].

5. (**МЛ 53/4**) Збир углова седмоугла је $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_7 = 900°$ [**5 поена**]. Да би збир $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ био минималан, треба да збир преостала три угла $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7$ буде максималан [**5 поена**], а то ће бити испуњено, због услова задатка када је $\alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 179°$ [**5 поена**]. Дакле, збир $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ је минималан ако је једнак $900° - 3 \cdot 179° = 363°$ [**5 поена**].